

球体在肥皂泡体中的运动

王心华, 金武, 李博斌, 盛英卓

(兰州大学物理科学与技术学院, 兰州 730000)



摘要:肥皂泡体作为非线性流体,对于外界的作用有着极其复杂的非线性响应。研究肥皂泡体中运动物体的动力学行为能够解释和解决生产和生活中的很多相关问题。通过理论建模、实验设计和数值模拟对于小而轻且与肥皂泡大小相差不大的球体在与肥皂泡体中的运动过程进行研究。首先从统计力学的系综角度给出了三维肥皂泡体动力学行为的理论解释,再从实验上验证了在重力场作用下,小球在肥皂泡中的动力学行为关系式,具有普遍性。

关键词:重力场;肥皂泡体;球体;统计描述

中图分类号:O 351.2

文献标志码:A

文章编号:1006-7167(2017)05-0028-04

A Study on the Movement of the Sphere in Soap Bubbles

WANG Xinhua, JIN Wu, LI Bobin, SHENG Yingzhuo

(School of Physical Science and Technology, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

Abstract: The soap bubble, as a nonlinear fluid, has a very complex non-linear response to external actions. This paper attempts to give a theoretical explanation to this process by a small and light sphere which has similar size of soap bubble and travels in suds, from the view point of statistics. The experiments show that the original description thought is reasonable.

Key words: gravity field; soap bubbles; spheres; statistical description

0 引言

肥皂泡体类似于普通的流体,但又有普通流体无法相比拟的特性。近年来,肥皂泡体常用于粉体矿物分离、消防器材、工业清洁、交通工具的生产和油井中原油的回收等^[1-5]。同时,肥皂泡体作为复杂流体介质的典型例子,普遍受到国内外理论研究领域的关注,尤其是肥皂泡体对其中运动物体的动力学行为的影响^[6-10]。然而,肥皂泡体作为非线性流体,其对于外界的作用有着极其复杂的非线性响应,从而导致动力系统近乎无规律的随时演化行为,这是肥皂泡体对动

力学系统的影响描述的困难所在。对此无序三维肥皂泡体的研究,国内外的研究人员大多并未从理论上进行系统的描述,而是从实验的角度,采取唯象的研究策略,从而得到描述三维肥皂泡体对动力学的经验关系^[11-13]。本文论述了在重力场作用下球体在肥皂泡体中的运动现象,从统计力学的系综角度上给出理论的解释,并从实验上证明其合理性。

1 理论分析

由于肥皂泡体结构的复杂性,而本文研究的对象是肥皂泡体中和肥皂泡大小差不多的小而轻的球体在重力场中的运动,这导致系统更加复杂。面对如此复杂的过程,我们放弃对于小球在肥皂泡体之中的精确运动描述,转而从统计的系综角度描述小球在肥皂泡体之中的运动。

肥皂泡因其内部含水量的不同而呈现完全迥异的形态和完全不同的物理特性。在此引入物理量液相比

收稿日期:2016-09-12

基金项目:中央高校基本科研业务费专项资金项目(lzujbky-2016-117)

作者简介:王心华(1979-)男,青海海东人,实验师,从事大学物理实验教学及磁性纳米材料研究。

Tel.:18919999598; E-mail:xhwang@lzu.edu.cn

Φ , 定义:

$$\frac{1}{3}\Phi = \frac{\sigma_f}{\sigma_1}$$

其中: σ_f 是肥皂泡体的传导性度量; σ_1 是流体中无气体时的传导性^[14]。

肥皂泡具有独特的可以发生形变和流动的网状结构(见图1);而肥皂泡体是具有弹性体与流体双重结构的连续媒质。所以把小球在肥皂泡中的受力分为由泡沫的网状结构和黏滞作用两大类因素引起。这也是肥皂泡体对其中运动小球的相互作用的基本分类。

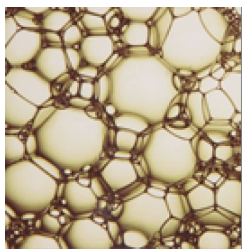


图1 肥皂泡网状结构

由肥皂泡体的物理特性分析可直接得到,小球在肥皂泡氛围之中的受力分为黏滞作用和弹性作用。黏滞作用一般同流体一样,与小球下落的速度成幂次关系;弹性作用源于肥皂泡的网络结构形变,与小球下落速度无关,即该作用是单向的。小球的动力学行为不会影响肥皂泡,首先得到量化关系:

$$F = F_0 + \chi(R, \Phi, A, r)v^n, \quad mg > F_0 \quad (1)$$

$$v = 0, \quad mg \leq F_0 \quad (2)$$

式中: F 为小球所受到肥皂泡体的总作用; F_0 是肥皂泡体由于网络结构形变而引起的弹性作用; $\chi \cdot v^n$ 项为小球受到的黏滞作用。由分析可知, $\chi \cdot v^n$ 项中的 χ 系数必定与小球的半径 R ,表面浸润性 A ,肥皂泡体中肥皂泡的平均半径 r ,液相比 Φ 等相关。而式(2)表示当小球的重力小于 F_0 时,小球将被肥皂泡体撑住而无法下落。

进一步对弹性作用分析可知,弹性作用由两部分组成,即由肥皂泡壁的表面张力的净合力和球接触的气泡内的挤压净合力组成(见图2)。

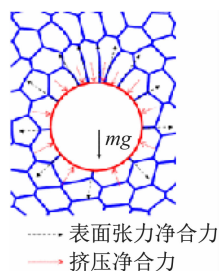


图2 肥皂泡受力情况

对于二维气泡壁的净合力的经验关系为^[15]:

$$F_0^n = \frac{0.516 \mu(\sigma, \text{size}_{\text{气泡}}) \text{size}_{\text{障碍物}}}{\Phi^{1/4} \sqrt{\text{area}_{\text{气泡}}}}$$

对于研究的三维情况,由于物理情形的相似性,将其直接推广为:

$$F_0^n = \frac{\text{const} \sigma R}{\Phi^{1/4} r} \quad (3)$$

而对于气泡内的净挤压合力,选取球坐标积分,面元方向为外法向,得:

$$\bar{F}_0^p = - \oint_{\text{球面}} P d\bar{s} \quad (4)$$

由于球体周围气泡内的气压分布极其复杂,故由统计系统的角度考虑,小球表面的气压分布可用模型替换,

$$P(\theta, \varphi) = P(\theta) = \left(P_0 + \frac{4\sigma}{r} \right) \frac{2n_0 + 1 - \cos \theta}{2n_0} \quad (5)$$

该模型表明球表面的气压分布只与 θ 方向有关,而与 φ 向无关,气压的变化是余弦型,且在小球下面的气泡的内压比球上大出 $1/n_0$ 。其中, P_0 为肥皂泡体所处大气压。由

$$\bar{F}_0^p = - \oint P(\theta) (\sin \theta \cos \varphi \bar{i} + \sin \theta \sin \varphi \bar{j} + \cos \theta \bar{k}) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

积分可得

$$\bar{F}_0^p = \frac{2R^2}{3n_0} \left(P_0 + \frac{4\sigma}{r} \right) \pi \bar{k}$$

到此,可以得到由式(1)、(2)小球在肥皂泡体的动力学方程:

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F} - mg \bar{k} = \left(\bar{F}_0 - \chi \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right)^{n-1} \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right) \right) - mg \bar{k} \quad (6)$$

此时选取小球的出发点为坐标原点,则初始条件为:

$$\bar{r} = 0, \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = 0$$

式中: \bar{r} 为球心的位置矢量。而肥皂泡体的弹性阻力为:

$$\mathbf{F}_0 = \bar{F}_0^n + \bar{F}_0^p$$

小球在重力场中运动与坐标 x 以及 y 方向无关,所以可认为肥皂泡体给小球的作用只在于坐标正 z 方向,则由式(3)~(5)得:

$$\mathbf{F}_0 = \left(\frac{\text{const} R \sigma}{\Phi^{1/4} r} + \frac{2R^2 \pi}{2n_0} \left(P_0 + \frac{4\sigma}{r} \right) \right) \bar{k} \quad (7)$$

因为与 \mathbf{F}_0 相关的参数在特定环境下不变,与小球的速度等均无关。可见 \mathbf{F}_0 在特定的实验环境之下是一个不变的矢量。而对于小球的动力学方程(6),其有级数形式的解析解。但是这种解的证伪过程将给实验带来诸多困难。但是仔细分析式(6)中的各项,可

知其演化的解的形式必定为一个稳定解。在物理过程上表现为,当小球下落时间足够长时,小球在肥皂泡体中匀速下降,此时方程(6)的加速项为零,简化为代数方程,可直接解出小球在肥皂泡体之中下落的最终速度 v_{\max} 满足:

$$mg = F_0 + \chi v_{\max}^n \tag{8}$$

2 实验验证

为了验证以上理论分析的正确性,实验上只需验证理论分析的最终结论式(8)所描述的关系。实际小球在运动时,式(6)所描述的加速阶段的持续时间是非常短的。所以实验上观察到的现象多为小球稳定之后的状态,即式(8)所描述的情况。

根据式(8),由分析知 F_0 只与小球的半径有关,控制球的半径和材质以及肥皂泡的特性不变。改变球的质量,测量球的终速。由于最终球将匀速下落,由 $z = vt$ 可得,测量小球运动等间距 z 时所用的时间 t ,从而测定 v_{\max} 。

2.1 器材

研究器材有泡沫塑料小球(参数见表1)、标准计时器、大口径量筒(内径 5.5 cm)、米尺、起泡剂(甘油,蒸馏水,液态洗涤剂)、蒸馏水。

表 1 小球的参数

	编号				
	1	2	3	4	5
质量/g	0.138 0	0.156 8	0.213 9	0.255 4	0.313 7
直径/cm	1.00 ± 0.01				

2.2 实验方案

使用流量为 50 mL/min 氮气由口径 1 mm 的通气孔充入以体积比 $V_{\text{甘油}}:V_{\text{蒸馏水}}:V_{\text{洗涤剂}} \approx 14:72:14$ 的盛入量筒的起泡剂中。小球从液面以 $v = 0$ 自由下落,在量筒 A、B、C、D、E 处安置光电门(见图3),用来多次重复测量小球等间距的经过 AB、BC、CD、DE 的时间值,然后对大量的数据进行平均。当 $D_{\text{内径}} \approx 5.5 \text{ cm} > 2d_{\text{球}}$ 时,小球在肥皂泡中的行为受到边界的影响微乎其微,可不予考虑^[16]。

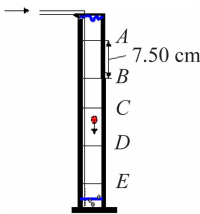


图 3 实验装置

2.3 结论分析

表 2 中, t_{AB} 、 t_{BC} 、 t_{CD} 、 t_{DE} 分别为对各小球下落过程

进行了 20 次实验后,对小球经过 AB、BC、CD、DE 的时间进行统计平均的数据,其中,涂以颜色的表格是小球匀速运动的区域。 v_{\max} 代表小球达到匀速运动后获得的最大速度。

表 2 统计平均之后所得到的实验值

球	t_{AB}/s	t_{BC}/s	t_{CD}/s	t_{DE}/s	$v_{\max}/(\text{cm} \cdot \text{s}^{-1})$
1 号	3.3	2.0	2.1	1.9	3.75
2 号	2.4	2.7	1.7	1.7	4.41
3 号	1.7	1.5	1.1	1.2	6.52
4 号	0.7	0.6	0.5	0.6	13.24
5 号	0.3	0.4	0.4	0.4	18.75

将实验数据依据式(8)在 Matlab 中使用非线性最小二乘法进行拟合,得到如图 4 的关系。从图中可以看出,若将实际的测量误差按照保守估计,则 $0.462 < n < 1$ 的范围内,理论关系式与实验是相符合的。

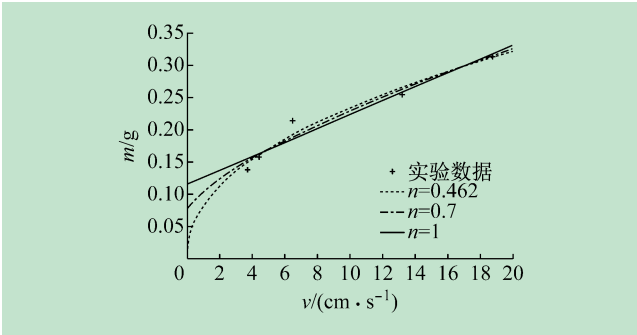


图 4 v_{\max} - m 实验数据与拟合图

为了进一步验证理论关系的正确性, n 分别取 0.462、0.47、0.50、0.60、0.70 进行拟合,得到如图 5 所示的结果。从图中可以看出,拟合方程形式的最大范围为 $0.462 < n < 1$ 。

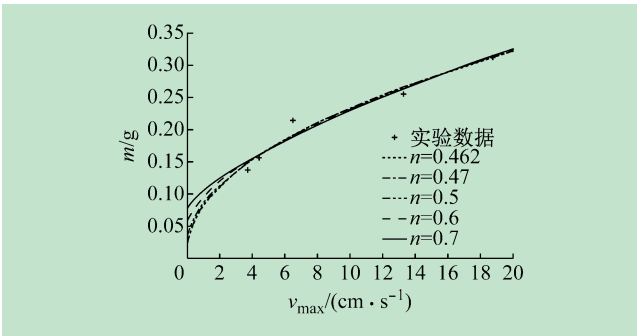


图 5 不同 n 值时 v_{\max} - m 实验数据与拟合图

表 3 给出了 n 取不同值时,式(8)中系数 F_0/g 和 χ/g 的取值。

从图 4、5 可以看出,当改变拟合理论关系中的未知参量 n 时,得到几乎重合的拟合方程。表 4 为 n 取不同数值时,实验参数和拟合曲线的均方误差。从表 4 可见,当 n 位于区间 0.465 ~ 1 之间时,实验数据与

表 3 不同 n 下 F_0 和 χ 的取值

n	F_0 / g	χ / g
< 0.462	< 0	—
0.462	0.000 334 4	0.080 450 0
0.470	0.004 022 0	0.077 680 0
0.500	0.016 780 0	0.068 270 0
0.600	0.049 930 0	0.045 400 0
0.700	0.073 390 0	0.030 980 0
1.000	0.114 700 0	0.010 800 0

表 4 不同 n 值时,实验参数和拟合曲线的均方误差

编号	n	均方误差
1	$< 0.461\ 5$	—
2	0.461 5	0.015 5
3	0.470 0	0.015 6
4	0.480 0	0.015 7
5	0.490 0	0.015 7
6	0.500 0	0.158 0
7	0.500 0	0.016 5
8	0.500 0	0.020 0
9	$> 2.000\ 0$	$> 0.030\ 0$

拟合方程之间的差距非常小,而且各 n 值对应的均方误差同样非常接近。这说明在给定的实验条件之下的肥皂泡体与球体的黏滞阻力关系呈现指数小于 1 的非线性关系。但对于具体的 n 值,可能像临界雷诺数一样是一个范围而非一个固定的值。

将实际测量的误差放到最大,则依据拟合方程(8)可以推导出当 $n = 1$ 时, $F_0^n < F_0^1 = m_{\text{临界}} = 0.11\text{ g}$,此时小球在肥皂泡中无法运动。在实验中,也观察到 $m = 0.106\ 5\text{ g}$ 的泡沫塑料球在肥皂泡中无法运动。而标号球 $m = 0.138\ 0\text{ g}$ 的泡沫塑料球可以运动。这正好从实验上说明了理论的正确性。

3 结 语

综上所述,通过理论建模、实验验证及数据模拟 3 种方式对小球在肥皂泡中的运动研究,得出了重力场作用下,小球在肥皂泡中运动的理论关系式,该式在 $0.462 < n < 1$ 范围内具有普通普遍性。本文所得出

的结论弥补了三维肥皂泡体研究的理论解释,对肥皂泡体中运动物体动力学行为的研究有着重要的实际意义。但本工作对 $n > 1$ 的情况研没有得出很好的结论,对 $n > 1$ 的情况下,小球在肥皂泡的运动规律的研究同样具有不可估量的价值。

参考文献 (References) :

[1] 郭平波. 肥皂泡筏中的力律与肥皂泡半径的关系 [D]. 重庆:重庆大学, 2008.

[2] 张 力,卢乾波,石 戈. 实验验证肥皂膜与肥皂泡的两个物理特性 [J]. 大学物理实验, 2013, 26 (1): 55-58.

[3] 游少平. 肥皂泡与建筑 [J]. 华中建筑, 2008, 26 : 20-23.

[4] 冷文秀,胡家晨,张鑫杰,等. 肥皂泡的光学和力学性质 [J]. 物理实验, 2013, 33 (2): 29-33.

[5] 唐玄之,王 琦,魏良淑,等. 大小肥皂泡联通后的讨论与计算 [J]. 大学物理, 2007, 26 (10): 20-23.

[6] Hassan A, Dmitri L Vainchtein. The equation of state of a foam [J]. Physics of Fluids, 2000, 12 (1): 23-28.

[7] Vainchteina D L, Arefb H. Morphological transition in compressible foam [J]. Physics of Fluids, 2001, 13 (8): 2152-2160.

[8] Saugey A, Drenckhan W, Weaire D. Wall slip of bubbles in foams [J]. Physics of Fluids, 2006, 18, 053101: 1-12.

[9] Jose' A Zapataa. Continuum spin foam model for 3d gravity [J]. Journal of Mathematical Physics, 2002, 43 (11): 5612-5623.

[10] Davies I T, Cox S J. Sedimenting discs in a two-dimensional foam [J]. Colloids and Surfaces A: Physicochem Eng Aspects, 2009, 344: 8-14.

[11] Besson S, Debre' Geas G. Dissipation in a sheared foam: From bubble adhesion to foam rheology [J]. Physical Review Letter, 2008, 101, 214504: 1-4.

[12] Taccoen N, Lequeux F, Gunes D Z, et al. Probing the mechanical strength of an armored bubble and its implication to particle-stabilized foams [J]. Physical Review X, 2016, 6, 011010: 1-11.

[13] Burnett G D, Chae J J, Tam W Y. Structure and dynamics of breaking foams [J]. Physical Review E, 1995, 51 (6): 5788-5796.

[14] Weaire D, Phelan R. The physics of foam [J]. Journal of Physics Condensed Matter, 1999, 47 (8): 9519-9524.

[15] Dollet B, Elias F, Quilliet C M, et al. Aubouy two-dimensional flow of foam around an obstacle: Force measurements [J]. Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics, 2005, 71: 142-154.

[16] John R, de Bruyn. Transient and steady-state drag in foam [J]. Rheologica Acta, 2004, 44 (2): 150-159.

· 名人名言 ·

科学实验是科学理论的源泉,是自然科学的根本,也是工程技术的基础。

——张文裕